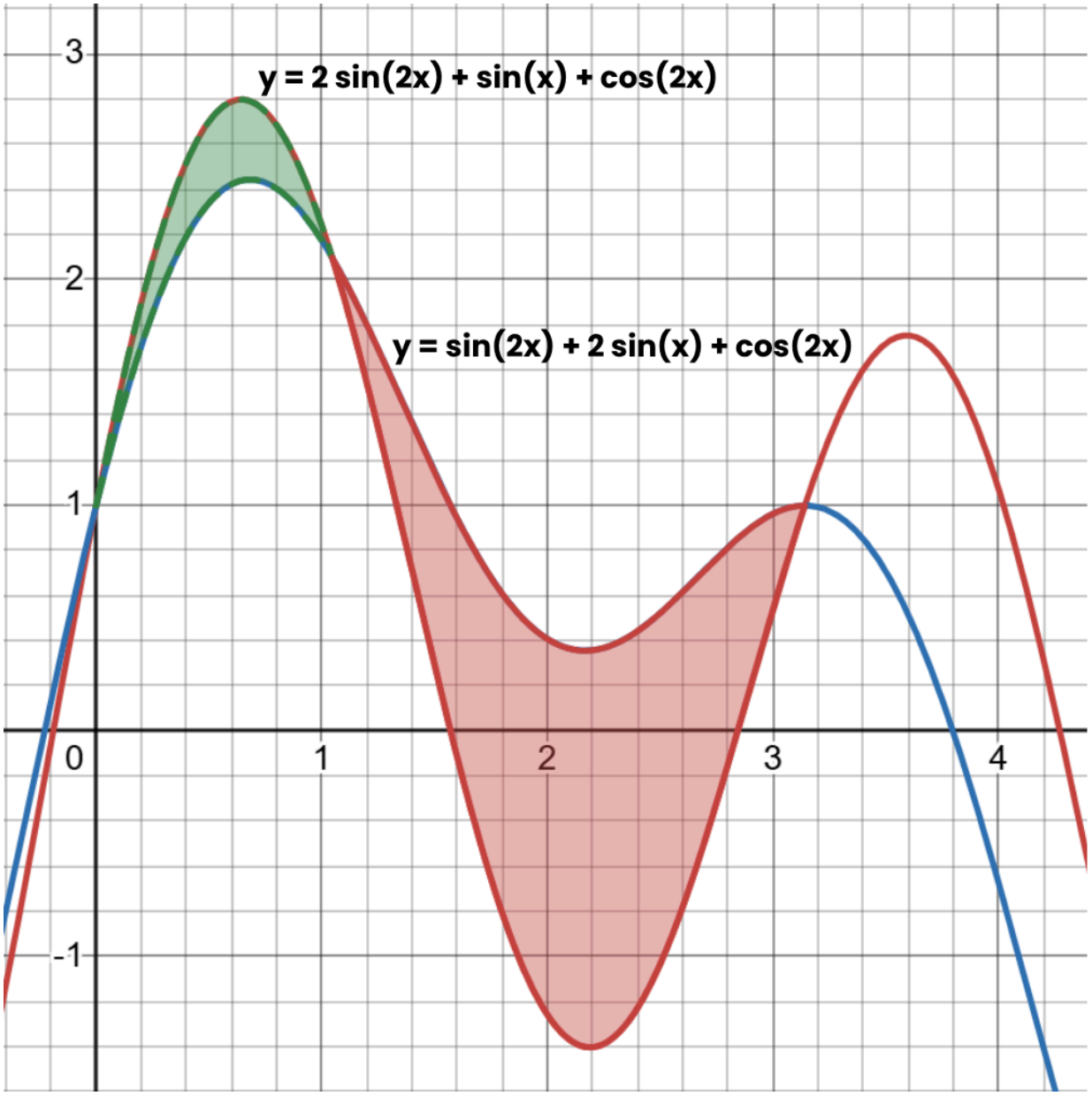
Tugas Kolaborasi Informatika dan Matematika

Anggota Kelompok :

a. Claudia Irene Wahjudi/XII-C1/09
b. Jeremy Prana Wibowo/XII-C1/21
c. Jessica Trixie Tan/XII-C1/24
d. Louis Pan Liandouw/XII-C1/29

1. 

Hitunglah luas daerah yang diarsir! $\{0 \leq x \leq \pi\}$

Pembahasan :

a. Misalkan,

$f(x) = 2\,sin(2x) + sin(x) + cos(2x)$

$g(x) = sin(2x) + 2\,sin(x) + cos(2x)$

b. Menentukan Titik Potong Kedua Kurva

$f(x) = g(x)$

$2\,sin(2x) + sin(x) + cos(2x) = sin(2x) + 2\,sin(x) + cos(2x)$

$sin(2x) - sin(x) = 0$

$2\,sin(x)cos(x) - sin(x) = 0$

$(sin(x))\,(2\,cos(x) - 1) = 0$

$sin(x) = 0 \ \vee \ 2\,cos(x) - 1 = 0$

$sin(x) = 0 \ \vee \ cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = 0, \pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{3}$

Jadi, titik potong kedua kurva berada pada $x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$

c. Menyusun Integral Luas Daerah

Karena terdapat 2 bagian/daerah, maka rumus luasnya adalah :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (g(x) - f(x))\,dx$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (sin(2x) - sin(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (-sin(2x) + sin(x))\,dx$$

$$L = \left[-\frac{1}{2}cos(2x) + cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{2}cos(2x) - cos(x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

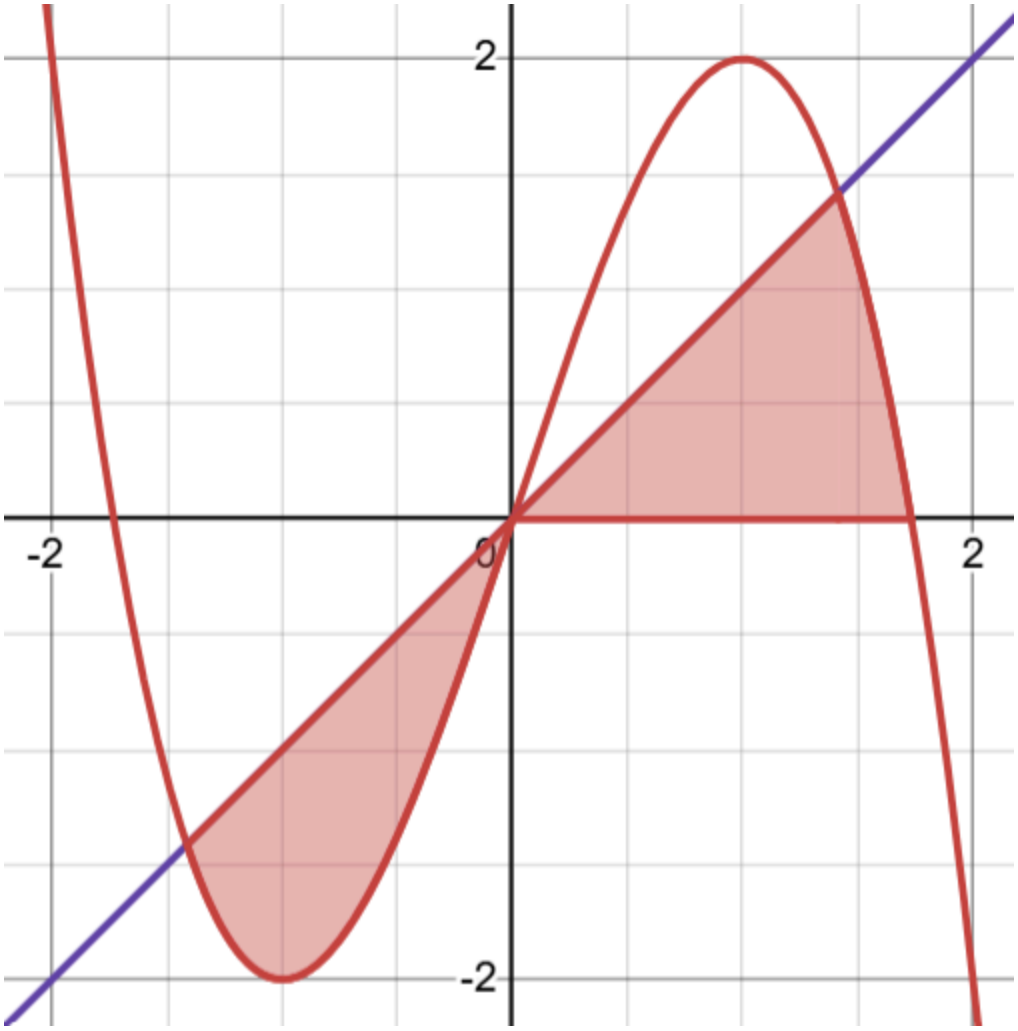
$$L = ((-\frac{1}{2}cos(\frac{2\pi}{3}) + cos(\frac{\pi}{3})) - (-\frac{1}{2}cos(0) + cos(0))) + ((\frac{1}{2}cos(2\pi) - cos(\pi)) - (\frac{1}{2}cos(\frac{2\pi}{3}) - cos(\frac{\pi}{3})))$$

$$L = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + 1) - (-\frac{1}{4} - \frac{1}{2})$$

$$L = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$$

$$L = \frac{5}{2}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $\frac{5}{2}$ satuan luas

2. 

Hitunglah daerah yang diarsir

Pembahasan :

a. Misalkan,

$f(x) = -x^3 + 3x$

$g(x) = x$

b. Menentukan titik potong kedua kurva

$f(x) = g(x)$

$-x^3 + 3x = x$

$-x^3 + 2x = 0$

$-x(x^2 + 2) = 0$

$x = -\sqrt{2},\ x = 0,\ x = \sqrt{2}\ (tidak\ diambil)$

c. Menentukan titik Interval

Interval luasan pertama = $\{-\sqrt{2} \leq x \leq 0\}$

$y = -x^3 + 3x$

$y = -x(x^2 + 3)$

$y = -\sqrt{3},\ y = 0,\ y = \sqrt{3}$

Interval luasan kedua =

$\{0 \leq x \leq \sqrt{3}\}$ $(karena\ arsiran\ hanya\ tidak\ menembus\ sumbu\ x)$

d. Menyusun Integral Luas Daerah

$$L = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} (g(x) - f(x))\,dx$$

$$L = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (-x^3 + 3x - (x))\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} (x - (-x^3 + 3x))\,dx$$

$$L = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (-x^3 + 2x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} (x^3 - 2x))\,dx$$

$$L = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2\right]_{0}^{\sqrt{3}}$$

$$L = \left[-\frac{1}{4}(0)^4 + (0)^2 - (-\frac{1}{4}(-\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0} + \left[-\frac{1}{4}(\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^2 - (-\frac{1}{4}(0)^4 + (0)^2\right]_{0}^{\sqrt{3}}$$

$$L = 0 + 0 - (-1 + 2) + (-\frac{9}{4} + 3 - 0 + 0)$$

$$L = 1 + \frac{3}{4}$$

$$L = \frac{7}{4}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $\frac{7}{4}$ satuan luas.

3. Find the area of a region bounded by the curve $f(x) = 2\,sin(x)$ and $g(x) = \frac{4}{\pi}x$ for $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$!

Pembahasan :

a. Menentukan Titik Potong Kedua Kurva

$f(x) = g(x)$

$2\,sin(x) = \frac{4}{\pi}x$

$sin(x) = \frac{2x}{\pi}$

$x = 0 \ \vee \ x = \frac{\pi}{2}$

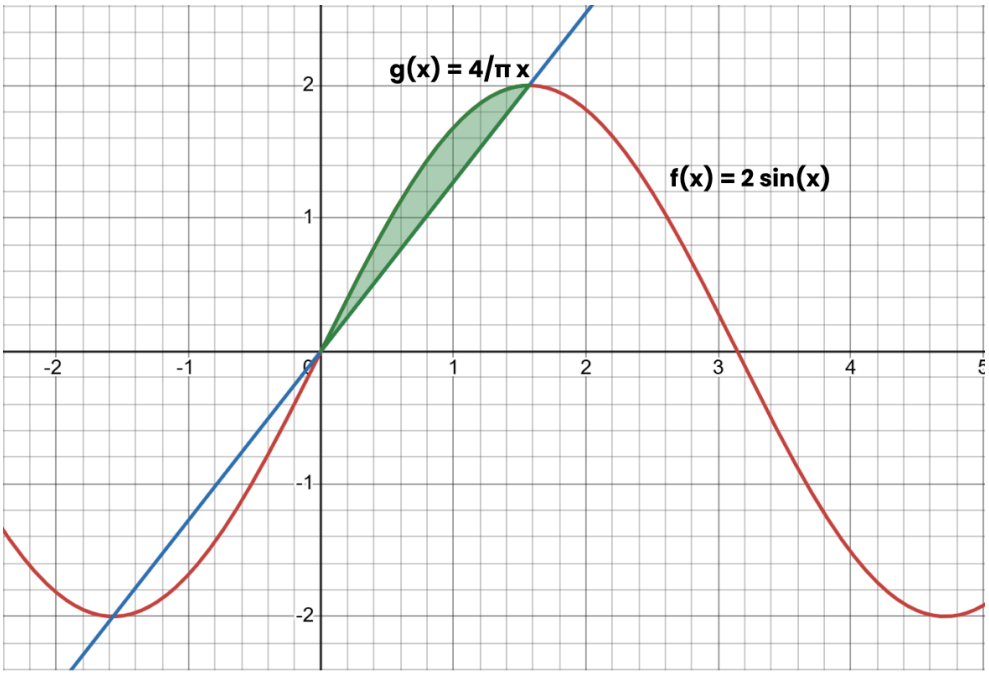
untuk $x = 0, y = 2\,sin(0) = 0$

untuk $x = \frac{\pi}{2}, y = 2\,sin(\frac{\pi}{2}) = 2$

Jadi, kedua kurva berpotongan di $(0, 0)$ dan $(\frac{\pi}{2}, 2)$

b. Gambar Kurva

Kurva $f(x) = 1\ sin(x)$ memiliki amplitudo sebesar 1, sehingga nilai maksimumnya adalah 1 dan nilai minimumnya -1. Amplitudo merupakan nilai yang terdapat pada sumbu-Y kurva. Agar dapat mencapai nilai maksimum sebesar 1, maka kita perlu menempuh jarak sejauh 90° atau $\frac{\pi}{2}$, sesuai dengan sudut istimewa pada sin, sehingga titik maksimumnya adalah $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Namun, jika terdapat koefisien pengali pada persamaan tersebut, misalnya $f(x) = 2\ sin(x)$, maka amplitudo dalam grafik tersebut berubah menjadi 2, sehingga nilai maksimumnya menjadi 2 dan nilai minimumnya menjadi -2. Sedangkan untuk jarak yang ditempuh tetap sama, yaitu sejauh 90° atau $\frac{\pi}{2}$ untuk mencapai nilai maksimum.



c. Menyusun Integral Luas Daerah

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\ sin(x) - \frac{4}{\pi}x)\ dx$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ sin(x)\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi}x\ dx$$

$$L = \left[-\ 2\ cos(x) - \frac{2}{\pi}x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$L = (-2\,cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2})^2) - (-2\,cos(0) - \frac{2}{\pi}(0)^2)$

$L = (0 - \frac{\pi}{2}) - (-2)$

$L = 2 - \frac{\pi}{2}$

Jadi, luas daerah yang dibatasi oleh kedua kurva adalah $2 - \frac{\pi}{2}$ satuan luas

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x^2 - 4x + 3$, $y = x - 1$, dan $y = 0$!

   Pembahasan :

   a. Menentukan Titik Potong Ketiga Grafik

      Parabola dengan sumbu X

      $x^2 - 4x + 3 = 0$

      $(x - 1)(x - 3) = 0$

      $x = 1 \vee x = 3$

      Garis dengan Sumbu X

      $x - 1 = 0$

      $x = 1$

      Parabola dengan Garis

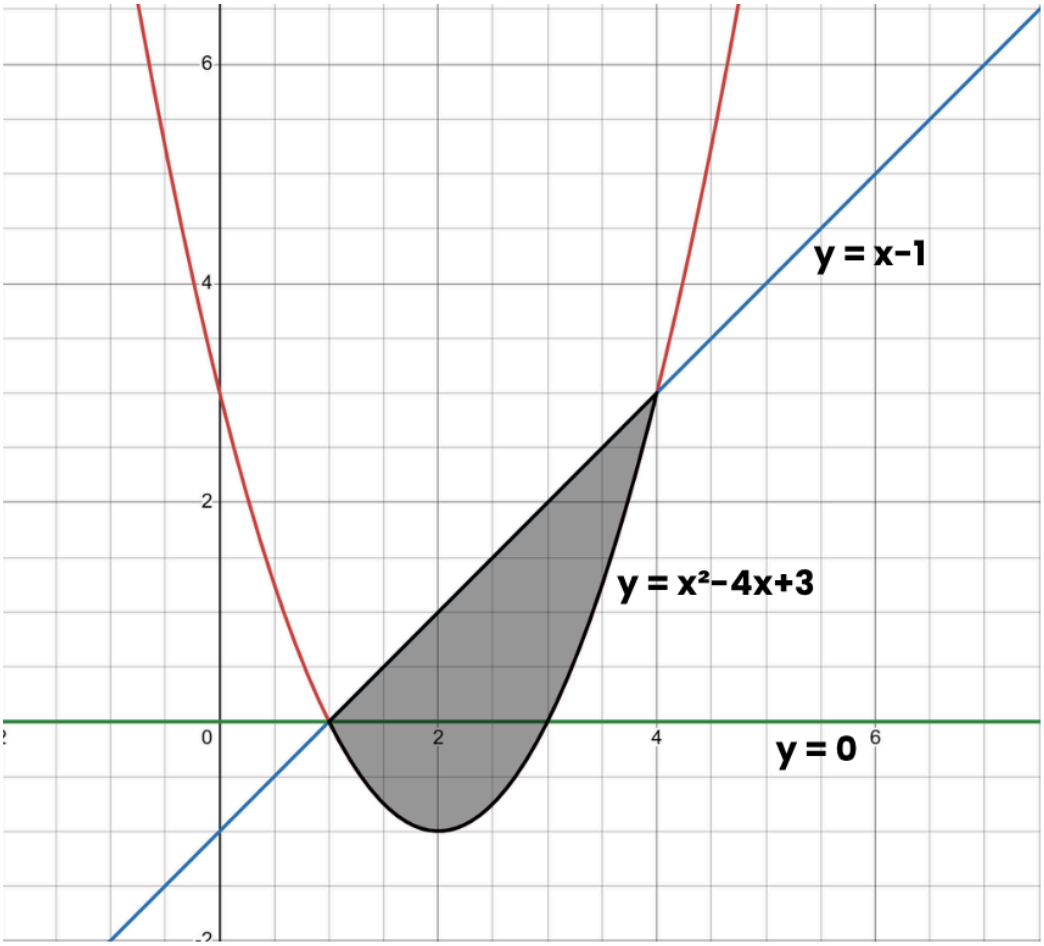
      $x^2 - 4x + 3 = x - 1$

      $x^2 - 5x + 4 = 0$

      $x = 1 \vee x = 4$

      Titik potong pada kurva kurva tersebut adalah $(1, 0),\ (3, 0),\ dan\ (4, 3)$

   b. Menentukan Daerah yang Dibatasi



c. Menghitung Luas Daerah

$$L = \int_1^3 -(x^2 - 4x + 3)\,dx + \int_3^4 ((x - 1) - (x^2 - 4x + 3))\,dx$$

$$L = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx + \int_3^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx$$

$$L = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_3^4$$

$$L = (0 - (-\frac{4}{3})) + (\frac{8}{3} - \frac{3}{2})$$

$$L = \frac{4}{3} + \frac{7}{6}$$

$$L = \frac{5}{2}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $\frac{5}{2}$ satuan luas.

5. Suatu perusahaan memproduksi dan menjual suatu barang dengan fungsi penawaran dan fungsi permintaan sebagai berikut:

$P_s(q) = 2q^2 + 4q + 8$

$P_d(q) = 80 - 2q$

Berdasarkan kedua fungsi tersebut, tentukan:

a. Harga keseimbangan jumlah barang pada kondisi keseimbangan pasar
b. Besarnya surplus produsen

Pembahasan:

a. $P_s(q) = P_d(q)$

$2q^2 + 4q + 8 = 80 - 2q$

$2q^2 + 6q - 72 = 0$

$q^2 + 3q - 36 = 0$

$(q + 9)(q - 4) = 0$

$q = -9\ (TM)\ atau\ q = 4$

$Q_e = 4$

$P_e = 80 - 2(4)$

$P_e = 72$

Jadi, harga keseimbangan adalah Rp72 dan jumlah keseimbangan adalah 4 unit.

b. $SP = P_e \cdot Q_e - \int_0^{Q_e} P_s(q)dq$

$SP = 72(4) - \int_0^4 (2q^2 + 4q + 8)dq$

$SP = 288 - \left[\frac{2}{3}q^3 + 2q^2 + 8q\right]_0^4$

$SP = 288 - \left[\frac{2}{3}(4)^3 + 2(4)^2 + 8(4)\right]$

$SP = 288 - \left[\frac{128}{3} + 32 + 32\right]$

$SP = 288 - \frac{320}{3}$

$SP = \frac{544}{3}$

$SP = Rp\ 181,33$

6. Diketahui fungsi permintaan suatu produk di pasaran ditunjukkan oleh persamaan :

$$P = 90 - 3Q$$

Sedangkan fungsi penawarannya adalah :

$$P = 10 + 2Q$$

Jika pasar berada dalam titik keseimbangan (ekuilibrium), hitunglah **besar surplus konsumen** yang dinikmati oleh pembeli !

Pembahasan :

$$Pd = Ps$$
$$90 - 3Q = 10 + 2Q$$
$$90 - 10 = 2Q + 3Q$$
$$80 = 5Q$$
$$Q = 80 : 5 = 16 \text{ (} \textit{Kuantitas keseimbangan, Qe} \text{)}$$

P = 90 −3 (16)
P = 90 − 48 = 42 (*Harga keseimbangan, Pe*)
Jadi, titik keseimbangan pasar tercapai pada **Qe = 16 dan Pe = 42**.

$$Cs : \int_0^{Qe} (P - Pe) \, dQ$$
$$Cs : \int_0^{16} ((90 - 3Q) - 42) \, dQ$$
$$Cs : \int_0^{16} (90 - 42 - 3Q) \, dQ$$
$$Cs : \int_0^{16} (48 - 3Q) \, dQ$$

$$C_s = \left[48Q - \frac{3}{2}Q^2 \right]_0^{16}$$

Untuk batas atas (Q = 16) :
$= 48 (16) - 32 (16)^2$
$= 768 - 32 (256)$
$= 768 - 3 (128)$
$= 768 - 384 = 384$

Untuk batas bawah (Q = 0) :

$= 48 (0) - 32 (0)^2 = 0$

Cs = 384 − 0 = 384