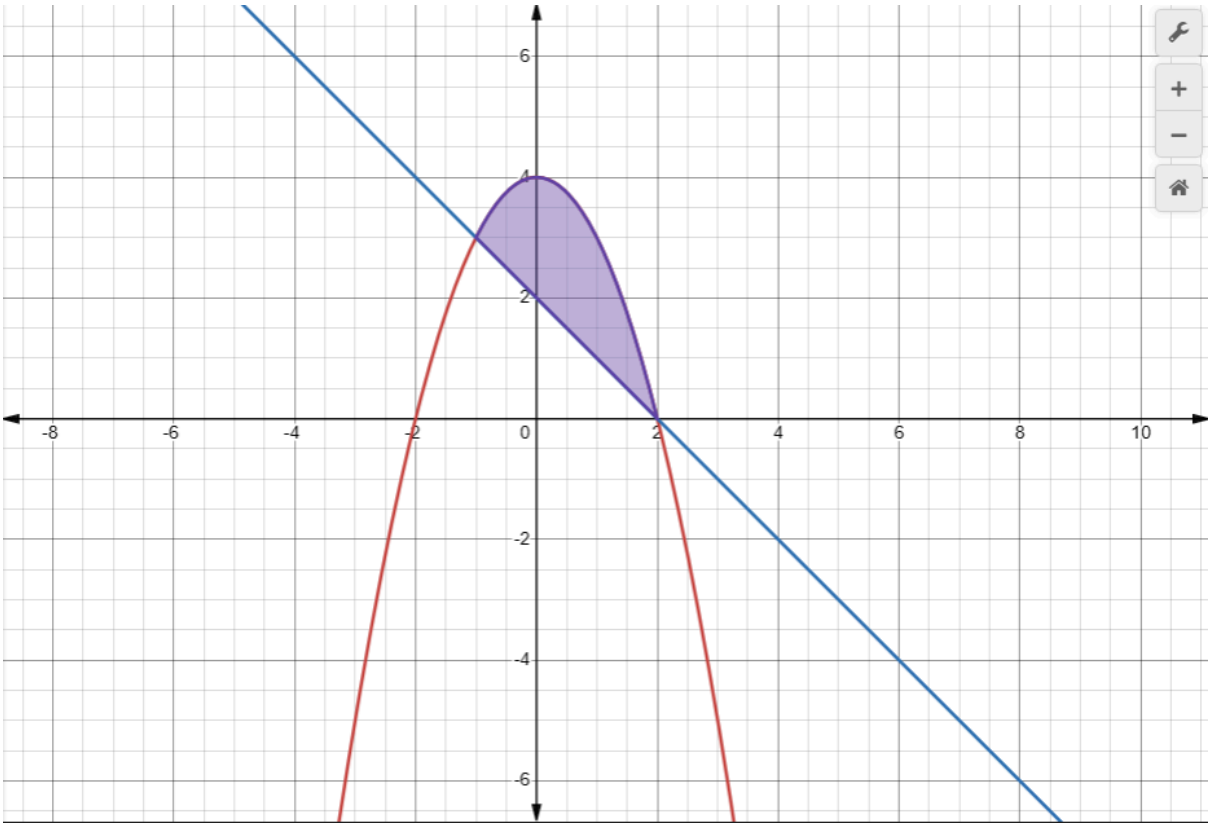
TUGAS INTEGRAL

Aurelia Renata Harianto	XII-C1/05
Giovanno Glorius Teguh	XII-C1/15
Kevin Nathanael Sondak	XII-C1/28
Samantha Jesselyn Prasetio	XII-C1/35

1. Tentukan luas daerah dari gambar berikut :



Persamaan kurva 1 :

memotong sumbu x di x = -2 dan x = 2, titik puncak di titik (0,4)

$y = a(x - xp)^2 + yp$

$y = a(x - 0)^2 + 4$

$y = ax^2 + 4$

(-2,0)

$0 = a(-2)^2 + 4$

$-4 = 4a$

$a = -1$

$y = -x^2 + 4$

Persamaan garis lurus 1

$\frac{y-y1}{y2-y1} = \frac{x-x1}{x2-x1}$

$\frac{y-(-2)}{0-(-2)} = \frac{x-0}{4-0}$

$\frac{y+2}{2} = \frac{x}{4}$

$2x = 4(y + 2)$

$x = y + 2$

$y = -x + 2$

Titik potong :

$y1 = y2$

$-x^2 + 4 = -x + 2$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2 \ \vee x = -1$

$L = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4) - (-x + 2)\, dx$

$L = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx$

$L = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$

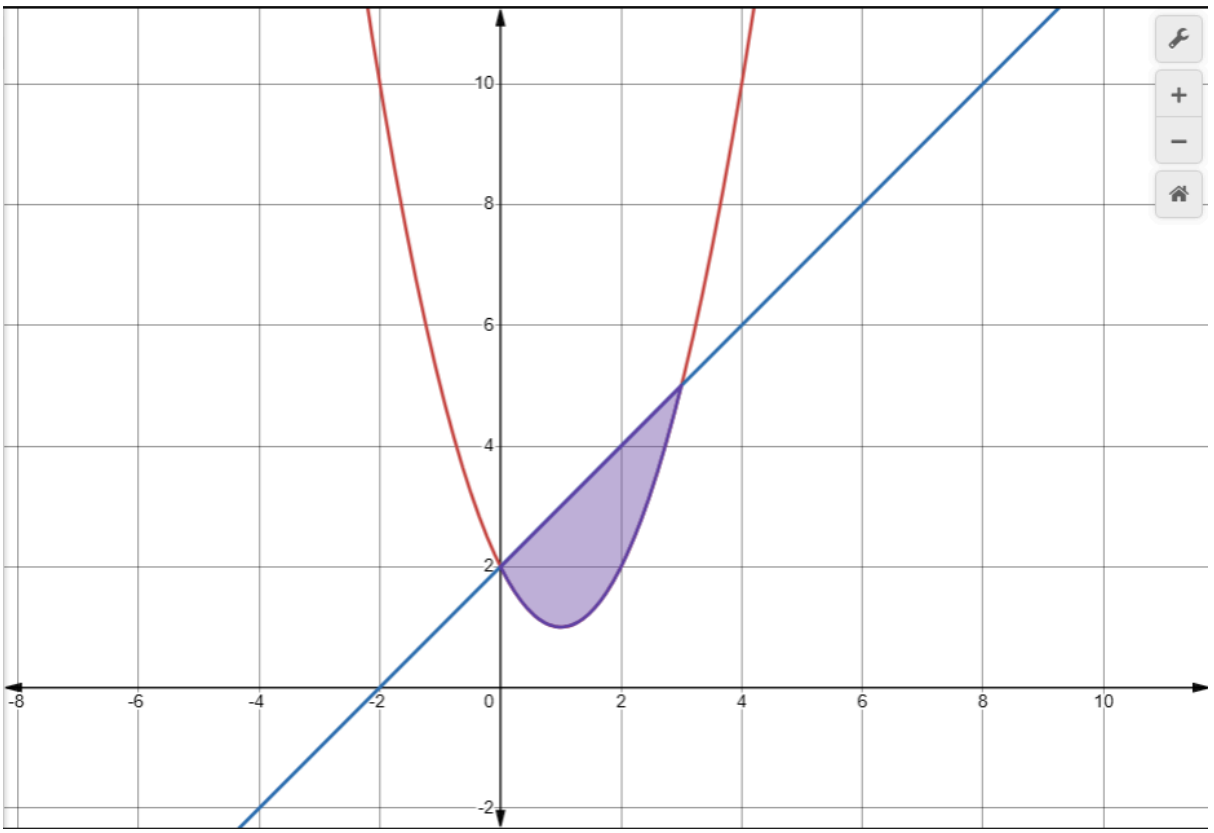
$L = \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - (-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2)$

$L = (-\frac{8}{3} + \frac{18}{3}) - (-\frac{2}{6} - \frac{3}{6} + \frac{12}{6})$

$L = \frac{10}{3} - \frac{7}{6}$

$L = \frac{20}{6} - \frac{7}{6} = \frac{13}{6}$ satuan luas

2. Tentukan luas daerah dari gambar berikut :



Persamaan kurva : tidak memotong di sumbu x, titik puncak di (1,1)

$y = a(x - xp)^2 + yp$

$y = a(x - 1)^2 + 1$

$y = a(x^2 - 2x + 1) + 1$

$y = ax^2 - 2ax + a + 1$

memotong di sumbu y (0,2)

$2 = 0 - 0 + a + 1$

$a = 1$

$y = x^2 - 2x + 2$

Persamaan garis lurus

$\frac{y-y1}{y2-y1} = \frac{x-x1}{x2-x1}$

$\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-0}{3-0}$

$\frac{y-2}{3} = \frac{x}{3}$

$3(y - 2) = 3x$

$3y - 6 = 3x$

$y = x + 2$

Titik potong :

$y_1 = y_2$

$x^2 - 2x + 2 = x + 2$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

$L = \int_0^3 (x + 2) - (x^2 - 2x + 2)\, dx$

$L = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx$

$L = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3$

$L = (-9 + \frac{27}{2}) - 0$

$L = \frac{9}{2}$ satuan luas

3. Daerah D dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4x + 3$ dan garis $y = x - 1$.

a. Tentukan titik potong kurva dan garis tersebut.

Samakan kedua persamaan:

$x^2 - 4x + 3 = x - 1$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x - 4) = 0$

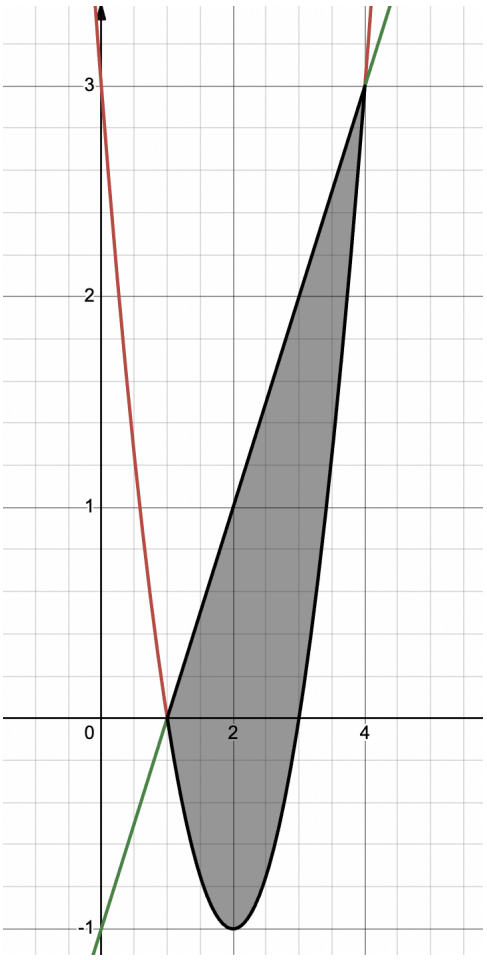
$x = 1$ atau $x = 4$

Substitusi ke $y = x - 1$:

$x = 1 \rightarrow y = 0$

$x = 4 \rightarrow y = 3$

Jawab: Titik potongnya adalah (1, 0) dan (4, 3).



b. Hitunglah luas daerah D

Diketahui**:** batas integral $x = 1$ sampai $x = 4$.

Tentukan kurva atas dan bawah. Ambil titik uji $x = 2$:

Garis: $y = 2 - 1 = 1$

Kurva: $y = 4 - 8 + 3 = -1$

Jadi garis berada di atas kurva.

$$L = \int_1^4 [(x - 1) - (x^2 - 4x + 3)]\, dx$$

$$L = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\quad dx$$

$$L = [-\frac{1}{3}x^3 + (\frac{5}{2})x^2 - 4x]_1^4$$

Hitung di $x = 4$:

$$-\frac{64}{3} + 40 - 16 = -\frac{64}{3} + 24 = \frac{8}{3}$$

Hitung di $x = 1$:

$$-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 = \frac{(-2 + 15 - 24)}{6} = -\frac{11}{6}$$

L = $\frac{8}{3}$ – (–$\frac{11}{6}$)= $\frac{9}{2}$

Jawab: Luas daerah D = $\frac{9}{2}$ *= 4,5 satuan luas.*

4. Diketahui parabola $y = x^2 - 4x + 5$. Garis g merupakan garis singgung parabola tersebut yang sejajar dengan garis $y - 2x - 7 = 0$. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 - 4x + 5$, garis singgung g, serta sumbu Y!

   Jawab:

   Garis $y - 2x + 7 = 0 \rightarrow \ y = 2x + 7$, gradien m = 2

   Gradien garis singgung parabola:

   Substitusi $x = 3$ ke parabola untuk mencari titik singgung:

$$y = (3)^2 - 4(3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

   Titik singgungnya adalah $(3, 2)$.

   Persamaan garis singgung g melalui $(3, 2)$ dengan gradien $m = 2$:

$$y - 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 4$$

$y_{atas} = x^2 - 4x + 5$ dan $y_{bawah} = 2x - 4$

$$L = \int_0^3 \left[(x^2 - 4x + 5) - (2x - 4)\right] dx$$

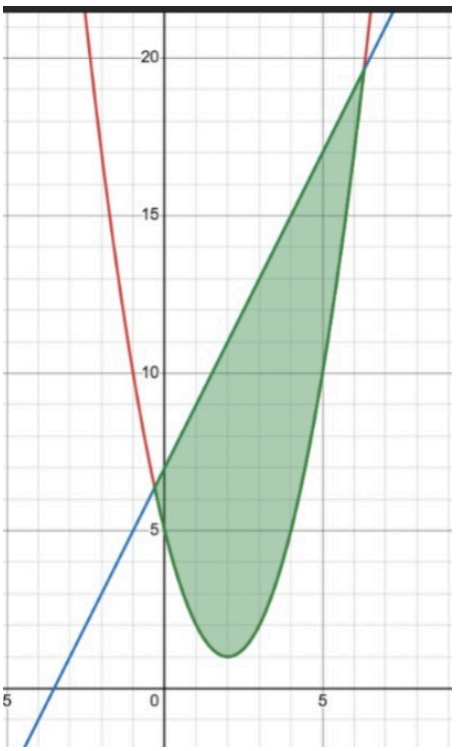
$$L = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx$$

$$L = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_0^3$$

   Di $x = 3$: $\frac{1}{3}(27) - 3(9) + 9(3) = 9 - 27 + 27 = 9$

   Di $x = 0$: 0

   Luas Daerah = 9 satuan luas



5. Sebuah perusahaan menjual produk minuman kemasan. Berdasarkan hasil survei pasar, diketahui bahwa hubungan antara harga dan jumlah permintaan konsumen dinyatakan dengan fungsi permintaan:

$$P_d = 100 - 2Q$$

dengan P_d merupakan harga produk dalam ribuan rupiah dan Q merupakan jumlah produk yang diminta dalam puluhan unit. Sementara itu, harga keseimbangan pasar ditetapkan sebesar Rp40.000,00 per unit. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan besar surplus konsumen menggunakan konsep integral!

Diketahui :

$P_d = 100 - 2Q$

$P_e = 40$

Jawab :

$40 = 100 - 2Q$

$2Q = 100 - 40$

$2Q = 60$

$$Q = 30$$

$$SK = \int_0^{Q_e} P_d(Q)dQ - P_e Q_e$$

$$SK = \int_0^{30} (100 - 2Q)dQ - (40)(30)$$

$$SK = \left[100Q - Q^2\right]_0^{30} - 1200$$

$$SK = (100(30) - 30^2) - 0 - 1200$$

$$SK = 3000 - 900 - 1200$$

$$SK = 900$$

Jadi, besar surplus konsumen adalah 900 ribu rupiah

6. Sebuah usaha roti rumahan memproduksi dan menjual roti setiap harinya. Berdasarkan data produksi, hubungan antara harga dan jumlah penawaran roti dinyatakan dengan fungsi penawaran:

$$P_s = 10 + Q$$

dengan P_s merupakan harga roti dalam ribuan rupiah dan Q merupakan jumlah roti dalam puluhan unit. Apabila harga keseimbangan pasar ditetapkan sebesar Rp40.000,00 per unit, tentukan besar surplus produsen menggunakan konsep integral!

Jawab :

Diketahui:

$$P_s = 10 + Q$$

$$P_e = 40$$

Jawab :

$$40 = 10 + Q$$

$$Q = 40 - 10$$

$$Q = 30$$

Rumus surplus produsen menggunakan integral:

$$SP = P_e Q_e - \int_0^{Q_e} P_s(Q)dQ$$

$$SP = (40)(30) - \int_0^{30} (10 + Q)dQ$$

$$SP = 1200 - \left[10Q + \frac{1}{2}Q^2\right]_0^{30}$$

$$SP = 1200 - \left(300 + \frac{1}{2}(900)\right)$$

$$SP = 1200 - (300 + 450)$$

$$SP = 1200 - 750$$

$$SP = 450$$

Jadi, besar surplus produsen adalah 450 ribu rupiah