SOAL KOLABORASI MATEMATIKA DAN TIK

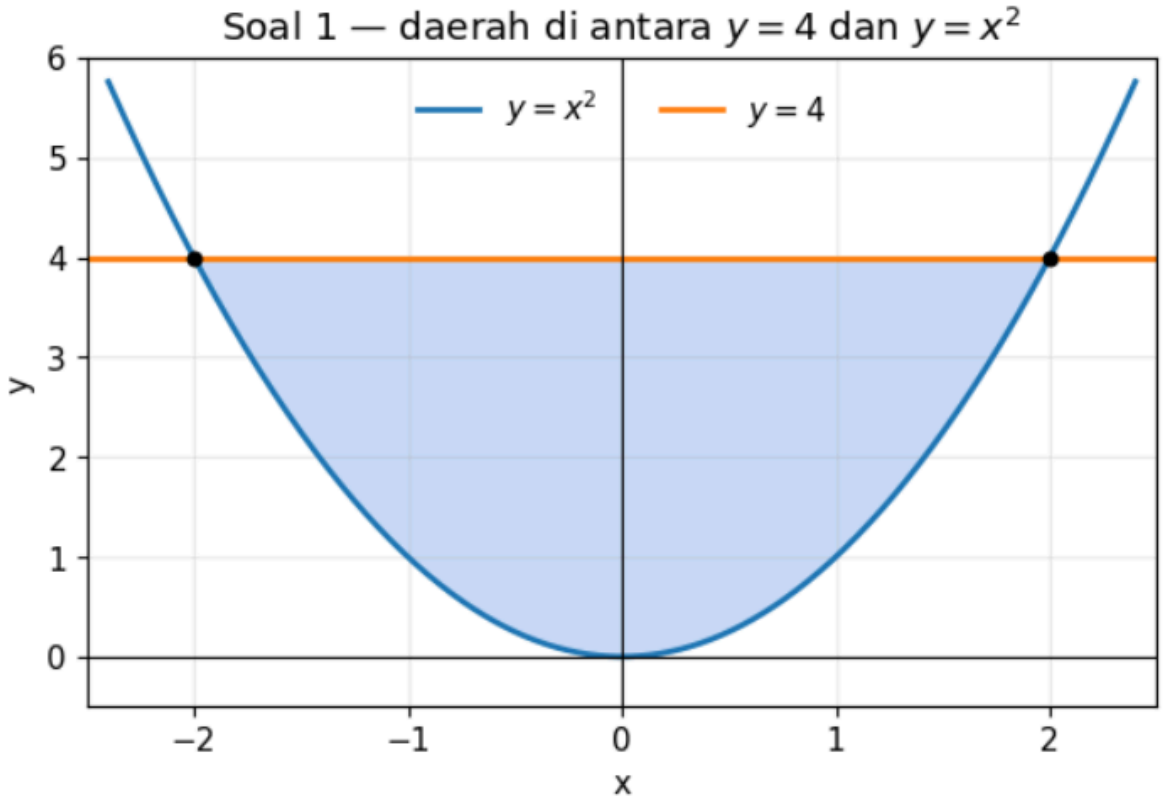
Anggota Kelompok:

1. Ashton Yu / XII-C1 / 04
2. Eleanor Gwen Estelle / XII-C1 / 10
3. Gabriel Aaron Laurentio / XII-C1 / 14
4. Jovan Fernando Chandra / XII-C1 / 26

SOAL

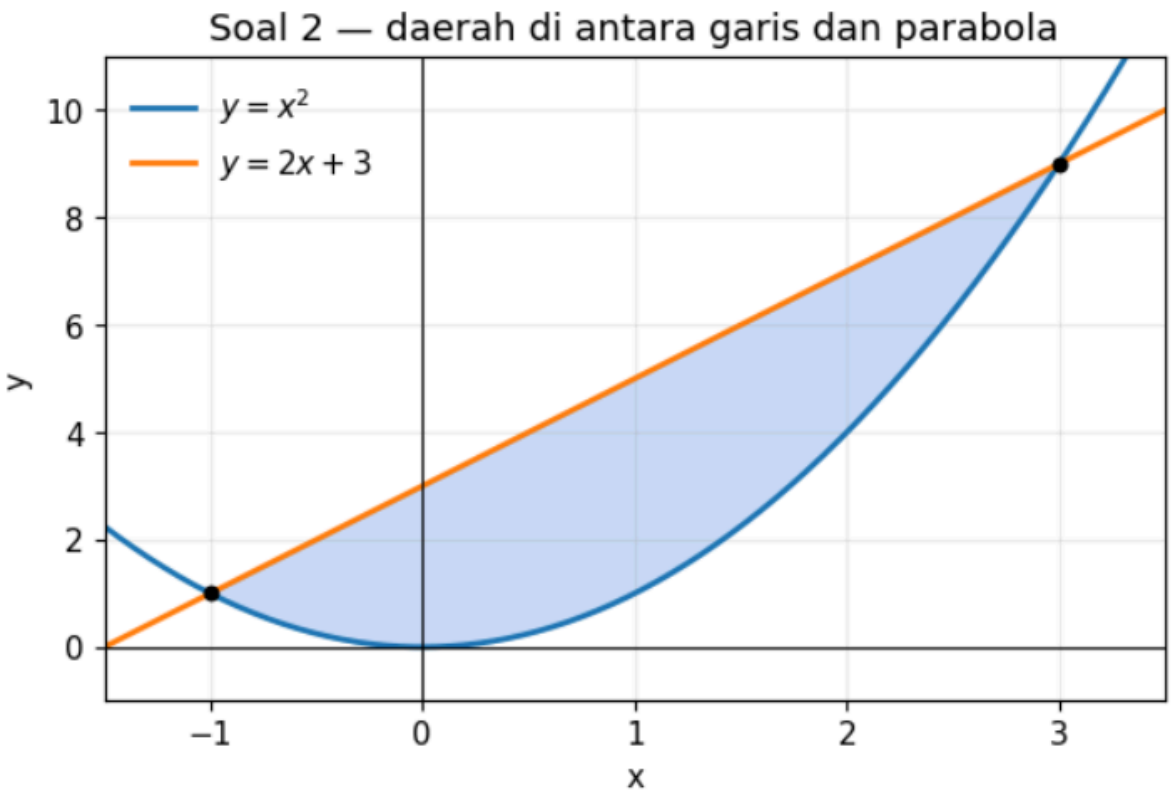
1. (Medium)

Perhatikan gambar daerah yang diarsir berikut. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 4$ menggunakan integral tentu.



2. (Medium)

Perhatikan gambar daerah yang diarsir berikut. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2x + 3$.



3. (Hard)

Diketahui dua kurva $y = x^3 - 3x$ dan $y = x$. Tentukan luas seluruh daerah yang dibatasi oleh kedua kurva tersebut. Gambarkan grafik kedua fungsi untuk menentukan daerah yang terbentuk.

4. (Hard)

Diketahui sebuah daerah dibatasi oleh kurva parabola $y = x^2 - 4$ dan garis lurus $y = 2x$. Tentukan luas daerah yang terbentuk di antara kedua kurva. Gambarkan grafik kedua fungsi terlebih dahulu.

5. (Easy)

Dalam suatu pasar, diketahui fungsi penawaran suatu barang adalah $P = 10 + Q$. Jika harga keseimbangan pasar adalah Rp40 per unit, tentukan besar surplus produsen menggunakan integral.

6. (Easy)

Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $P = 100 - 2Q$. Apabila harga pasar yang berlaku adalah Rp60 per unit, tentukan besar surplus konsumen menggunakan integral tentu.

PEMBAHASAN

1)

$x^2 = 4$

$x = -2, x = 2$

$L = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx$

$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$

$= \left(4(2) - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)$

$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right)$

$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$

$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}$

$= 16 - \frac{16}{3}$

$= \frac{48}{3} - \frac{16}{3}$

$= \frac{32}{3} satuan\ luas$

2)

$x^2 = 2x + 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3, x = -1$

$L = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2) dx$

$$= \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left(3^2 + 3(3) - \frac{3^3}{3}\right) - \left((-1)^2 + 3(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= \left(9 + 9 - \frac{27}{3}\right) - \left(1 - 3 - \frac{-1}{3}\right)$$

$$= (9 + 9 - 9) - \left(-2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 9 - \left(-\frac{6}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 9 - \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$= 9 + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{27}{3} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{32}{3} satuan\ luas$$

3)

Menentukan titik puncak (ekstrem) kurva $y = x^3 - 3x$:

Syarat stasioner ($y' = 0$):

$$y = x^3 - 3x$$

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = 1\ atau\ x = -1$$

Substitusi nilai x ke persamaan asal:

Untuk $x = \ -1$:

$y = (-1)^3 - 3(-1)$

$y = -1 + 3 = 2$

$Titik\ Puncak\ Maksimum = (-1, 2)$

Untuk $x = 1$:

$y = (1)^3 - 3(1)$

$y = 1 - 3 = -2$

$Titik\ Puncak\ Minimum = (1, -2)$

Titik Potong

$x^3 - 3x = x$

$x^3 - 4x = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

$x = -2, x = 0, x = 2$

Gambar daerah pada pembahasan:



$$L = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

$$= \left[0 - \left(\frac{16}{4} - 2(4)\right)\right] + \left[\left(2(4) - \frac{16}{4}\right) - 0\right]$$

$$= [0 - (4 - 8)] + [(8 - 4) - 0]$$

$$= [0 - (-4)] + [4 - 0]$$

$$= 4 + 4$$

= 8 satuan luas

4)

Titik Potong

$$x^2 - 4 = 2x$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{5}$$

Menentukan titik puncak parabola $y = x^2 - 4$:

Menggunakan rumus titik puncak (x_p, y_p):

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

$$x_p = -\frac{0}{2(1)} = 0$$

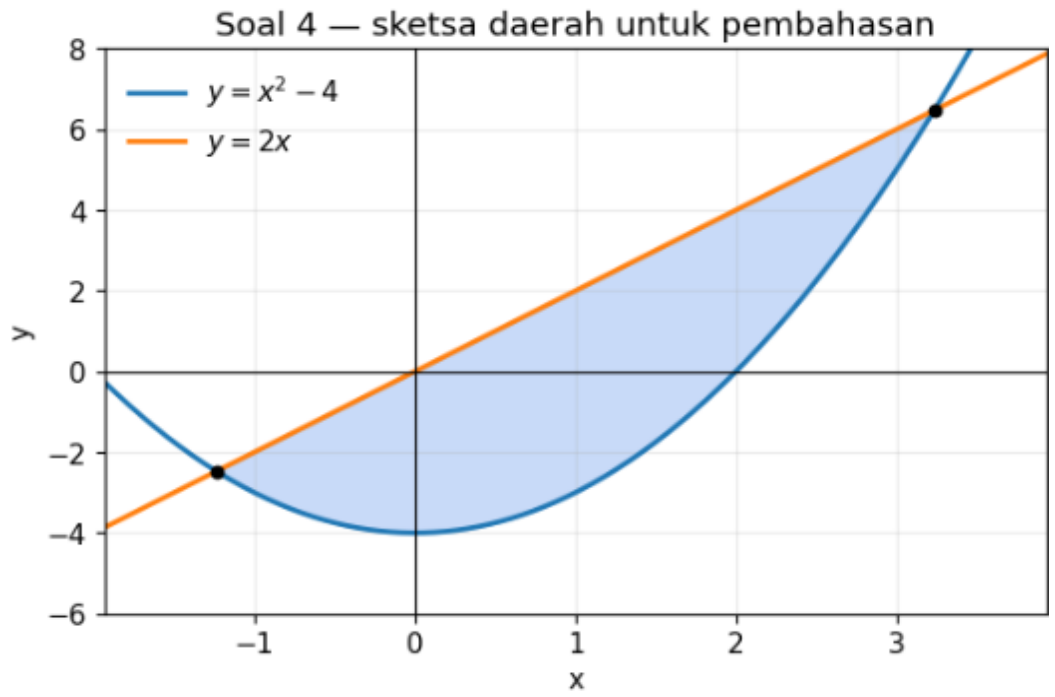
Substitusi $x_p = 0$ ke persamaan kurva:

$$y_p = (0)^2 - 4$$

$$y_p = -4$$

$Titik\ Puncak\ Parabola = (0, -4)$

Gambar daerah pada pembahasan:



$$L = \int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}} (-x^2 + 2x + 4)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}}$$

$$= \left[-\frac{(1+\sqrt{5})^3}{3} + (1+\sqrt{5})^2 + 4(1+\sqrt{5})\right] - \left[-\frac{(1-\sqrt{5})^3}{3} + (1-\sqrt{5})^2 + 4(1-\sqrt{5})\right]$$

$$= \left[-\frac{16+8\sqrt{5}}{3} + (6+2\sqrt{5}) + (4+4\sqrt{5})\right] - \left[-\frac{16-8\sqrt{5}}{3} + (6-2\sqrt{5}) + (4-4\sqrt{5})\right]$$

$$= \left[-\frac{16+8\sqrt{5}}{3} + (10+6\sqrt{5})\right] - \left[-\frac{16-8\sqrt{5}}{3} + (10-6\sqrt{5})\right]$$

$$= \left[-\frac{16+8\sqrt{5}}{3} + \frac{30+18\sqrt{5}}{3}\right] - \left[-\frac{16-8\sqrt{5}}{3} + \frac{30-18\sqrt{5}}{3}\right]$$

$$= \frac{14+10\sqrt{5}}{3} - \frac{14-10\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{20\sqrt{5}}{3} satuan\ luas$$

5)

$40 = 10 + Q\text{e}$

$Qe = 30$

$$Ps = \int_0^{30} [40 - (10 + Q)]dQ$$

$$= \int_0^{30} (30 - Q)dQ$$

$$= \left[30Q - \frac{Q^2}{2}\right]_0^{30}$$

$$= \left(30(30) - \frac{30^2}{2}\right) - \left(30(0) - \frac{0^2}{2}\right)$$

$$= \left(900 - \frac{900}{2}\right) - (0 - 0)$$

$$= (900 - 450) - 0$$

$$= 900 - 450$$

$$= 450$$

Jadi, surplus produsen sebesar Rp450.

6)

$60 = 100 - 2Q\text{e}$

$Qe = 20$

$$Cs = \int_0^{20} [(100 - 2Q) - 60]dQ$$

$$= \int_0^{20} (40 - 2Q)dQ$$

$$= \left[40Q - Q^2\right]_0^{20}$$

$= \left(40(20) - 20^2\right) - \left(40(0) - 0^2\right)$

$= (800 - 400) - (0 - 0)$

$= 800 - 400$

$= 400$

Jadi, surplus konsumen sebesar Rp400.