LATIHAN DAN PEMBAHASAN SOAL INTEGRAL

Bernard Hugo Njoto XII-C1/06
Hans Kurniawan XII-C1/18
Justin Gunawan XII-C1/27
Vincentius Kenneth Wiyanto XII-C1/36

Soal 1: Parabola dan Sumbu-X

Diketahui parabola $y = -(x - 2)^2 + 5$ dengan titik puncak P(2,5).

(a) Tentukan bentuk umum.
(b) Tentukan titik potong dengan sumbu-X.
(c) Hitung luas daerah yang dibatasi parabola dan sumbu-X.

Pembahasan

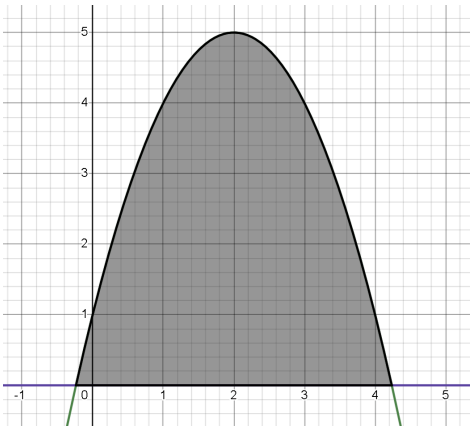
Diketahui:

$y = -(x - 2)^2 + 5$
P(2,5)

Ditanya:

(a) Bentuk umum
(b) Titik potong sumbu-X
(c) Luas daerah (L)

Jawab:



a. Bentuk umum

$y = -(x^2 - 4x + 4) + 5$

$y = -x^2 + 4x + 1$

b. Titik potong dengan sumbu-X (y = 0)

$-(x - 2)^2 + 5 = 0$

$(x - 2)^2 = 5$

$x - 2 = \pm \sqrt{5}$

$x = 2 \pm \sqrt{5}$

Titik potong: $(2 - \sqrt{5}\ 0)$ dan $(2 + \sqrt{5}, 0)$

c. Luas daerah

$$L = \int_{2-\sqrt{5}}^{2+\sqrt{5}} [-(x - 2)^2 + 5]\, dx$$

Misalkan $u = x - 2$, maka $du = dx$. Batas integrasi: $u = -\sqrt{5}$ sampai $u = \sqrt{5}$

$$L = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5 - u^2)\, du$$

$$L = [5u - \tfrac{1}{3}u^3]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}$$

$$L = (5\sqrt{5} - (\tfrac{1}{3})(5\sqrt{5})) - (-5\sqrt{5} - (\tfrac{1}{3})(-5\sqrt{5}))$$

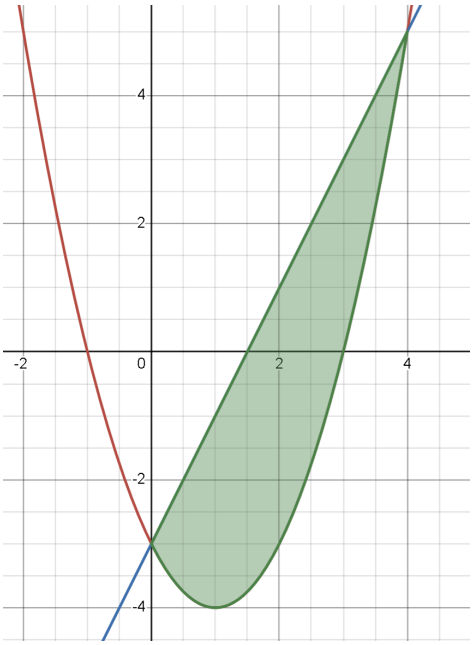
$$L = \tfrac{10}{3}\sqrt{5} - (-\tfrac{10}{3}\sqrt{5})$$

$$L = \tfrac{20}{3}\sqrt{5} \approx 14{,}91 \text{ satuan luas}$$

Jawaban: $L = \frac{20}{3}\sqrt{5} \approx 14{,}91$ satuan luas

Soal 2: Garis dan Parabola

Diketahui parabola berpuncak P(1,-4) dan melalui titik A(0,-3), serta garis melalui A(0,-3) dan B(4,5).



(a) Tentukan persamaan parabola.

(b) Tentukan persamaan garis.

(c) Tentukan titik potong dan luas daerah yang dibatasi kedua kurva.

Pembahasan

Diketahui:

P(1,-4)
A(0,-3)
B(4,5)

Ditanya:

(a) Persamaan parabola
(b) Persamaan garis
(c) Titik potong dan Luas daerah

Jawab:

a. Persamaan parabola

$y = a(x - 1)^2 - 4$

Melalui A(0,-3):

$-3 = a(0 - 1)^2 - 4$

$-3 = a - 4 \Rightarrow a = 1$

$y = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$

b. Persamaan garis melalui A(0,-3) dan B(4,5)

$m = (5 - (-3)) \div (4 - 0) = \frac{8}{4} = 2$

$y - (-3) = 2(x - 0)$

$y = 2x - 3$

c. Titik potong dan Luas daerah

$x^2 - 2x - 3 = 2x - 3$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x = 0$ atau $x = 4$

Titik potong: (0,-3) dan (4,5)

$$L = \int_0^4 [(2x - 3) - (x^2 - 2x - 3)]\, dx$$

$$L = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx$$

$$L = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4$$

$$L = \left(-\frac{1}{3}(64) + 2(16)\right) - 0$$

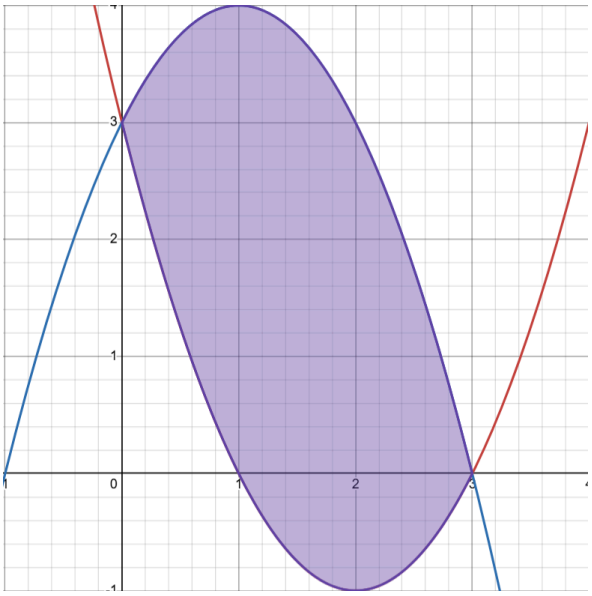
$$L = -\frac{64}{3} + 32$$

$$L = \frac{32}{3} \approx 10{,}67 \text{ satuan luas}$$

Jawaban: $L = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$ satuan luas

Soal 3: Dua Parabola

Diketahui $y_1 = x^2 - 4x + 3$ dan $y_2 = -x^2 + 2x + 3$.



(a) Tentukan titik potong.

(b) Tentukan kurva yang berada di atas.

(c) Hitung luas daerah yang dibatasi kedua kurva.

Pembahasan

Diketahui:

$y_1 = x^2 - 4x + 3$

$y_2 = -x^2 + 2x + 3$

Ditanya:

(a) Titik potong

(b) Kurva atas

(c) Luas daerah (L)

Jawab:

a. Titik potong

$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x - 3) = 0$

$x = 0$ atau $x = 3$

Titik potong: (0,3) dan (3,0)

b. Uji kurva atas pada interval [0,3]

Untuk x = 1:

- $y_1 = 0$
- $y_2 = 4$

Maka y_2 berada di atas y_1.

c. Luas daerah

$$L = \int_0^3 (y_2 - y_1)\, dx$$

$$L = \int_0^3 [(-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 4x + 3)]\, dx$$

$$L = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx$$

$$L = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3$$

$$L = \left(-\frac{2}{3}(27) + 3(9)\right) - 0$$

$$L = -18 + 27 = 9 \text{ satuan luas}$$

Jawaban: L = 9 satuan luas

Soal 4: Luas Lingkaran dengan Aplikasi Integral

Buktikan bahwa luas lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ adalah 9π dengan aplikasi integral.

Pembahasan

Diketahui:

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

Ditanya:

Pembuktian Luas $L = 9\pi$

Jawab:

$y = \pm\sqrt{(9 - x^2)}$
Titik potong sumbu-X: x = -3 dan x = 3.

Luas seluruh lingkaran sama dengan 4 kali luas kuadran I:

$$L = 4 \int_0^3 \sqrt{(9 - x^2)}\, dx$$

Substitusi trigonometri:

- Substitusi: $x = 3 \sin\theta \Rightarrow dx = 3 \cos\theta\, d\theta$
- Batas: $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$; $x = 3 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(9 - 9 \sin^2\theta)} \cdot (3 \cos\theta)\, d\theta$$

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos\theta \cdot (3 \cos\theta)\, d\theta$$

$$L = 36 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$L = 36 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + cos\, 2\theta)}{2}\, d\theta$$

$$L = 18 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$L = 18 \left[\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - (0 + 0)\right]$$

$$L = 9\pi \approx 28{,}27 \text{ satuan luas}$$

Terbukti: $L = 9\pi \approx 28{,}27$ satuan luas

Soal 5: Surplus Konsumen

Diketahui fungsi permintaan Pd= 80 - 2Q dan penawaran Ps = 20 + Q, dengan P dalam ribu rupiah dan Q dalam unit.

(a) Tentukan Qe
(b) Tentukan Pe

(c) Hitung surplus konsumen.

Pembahasan

Diketahui:

Pd = 80 - 2Q
Ps = 20 + Q

Ditanya:

(a) Qe
(b) Pe
(c) Surplus Konsumen (SK)

Jawab:

a. Keseimbangan pasar (Pd = Ps)

$80 - 2Q = 20 + Q$

$60 = 3Q$

$Qe = 20$ unit

b. Harga keseimbangan

$Pe = 20 + 20 = 40$ ribu rupiah

c. Surplus Konsumen (SK)

$$SK = \int_0^{Qe} (P - Pe)\, dQ$$

$$SK = \int_0^{20} [(80 - 2Q) - 40)\, dQ$$

$$SK = \int_0^{20} (40 - 2Q)\, dQ$$

$$SK = [40Q - Q^2]_0^{20}$$

$$SK = (40(20) - (20)^2) - 0$$

$SK = 800 - 400 = 400$ ribu rupiah

Jawaban: SK = Rp 400.000

Soal 6: Surplus Produsen

Diketahui fungsi permintaan Pd = 42 - Q dan penawaran Ps = Q^2 + 6, dengan P dalam ribu rupiah dan Q dalam unit.

(a) Qe
(b) Pe
(c) Surplus Produsen (SP)

Pembahasan

Diketahui:

Pd = 42 - Q
Ps = Q^2 + 6

Ditanya:

(a) Qe
(b) Pe
(c) Surplus Produsen (SP)

Jawab:

a. Keseimbangan pasar (Pd = Ps)

42 - Q = Q^2 + 6
Q^2 + Q - 36 = 0

Menggunakan rumus kuadrat:

$$Q = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-36)}}{2(1)}$$

$$Q = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{2}$$

Karena Q ≥ 0:

$$Qe = \frac{\sqrt{145} - 1}{2} \approx 5,521 \text{ unit}$$

b. Harga keseimbangan

$$Pe = 42 - \frac{\sqrt{145} - 1}{2}$$

$$Pe = \frac{85 - \sqrt{145}}{2} \approx 36,479 \text{ ribu rupiah}$$

c. Surplus Produsen (SP)

$$SP = \int_0^{Qe} (Pe - P)\, dQ$$

$$SP = \int_0^{Qe} [Pe - (Q^2 + 6)]\, dQ$$

$$SP = [(Pe - 6)Q - \frac{1}{3}Q^3]_0^{Qe}$$

Karena Pe - 6 = (Qe)²:

$$SP = Qe^3 - \frac{1}{3}Qe^3 = \frac{2}{3}Qe^3$$

$$SP = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{145}-1}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{145}-1}{12} \approx 112,18 \text{ ribu rupiah}$$

Jawaban: SP ≈ Rp 112.180