ANGGOTA KELOMPOK 3 XII-C1

1. Alicia Sukandi/02
2. Almyra Cahjono/03
3. Felicia Angelina/13
4. Jessica Celine Wuli/22

1. Luas daerah yang tepat dari daerah yang dibatasi oleh $f(x) = x^3 - 4x$ dan $g(x) = x^2 - 4$
   a. $\frac{65}{6}$ satuan luas
   b. $\frac{69}{6}$ satuan luas
   c. $\frac{71}{6}$ satuan luas
   d. $\frac{73}{6}$ satuan luas
   e. $\frac{77}{6}$ satuan luas

Jawab:

Langkah 1: Menentukan titik potong kedua kurva

$x^3 - 4x = x^2 - 4$

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

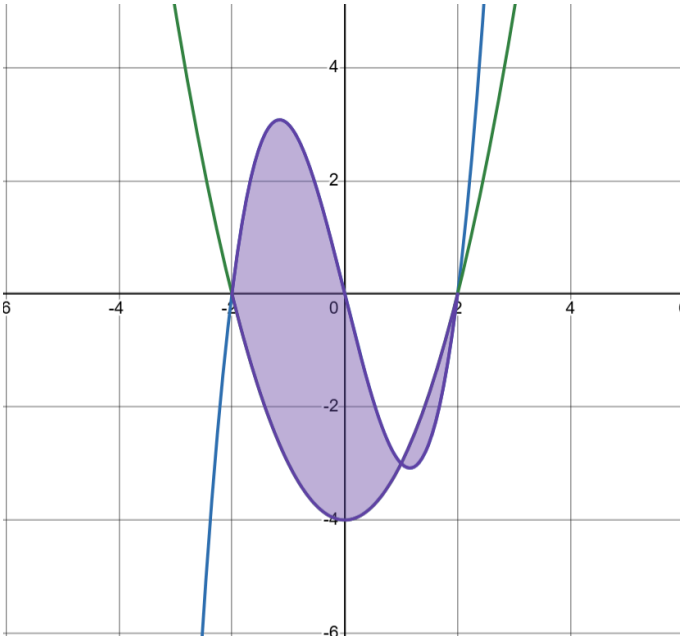
$x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0$

$(x - 1)(x^2 - 4) = 0$

$(x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0$

$x_1 = 1 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -2$

Langkah 2: Menentukan fungsi atas dan bawah



Daerah 1: $f(x)$ di atas $g(x)$

Daerah 2: $g(x)$ di atas $f(x)$

Langkah 3: Menghitung luas total

$L = L_1 + L_2$

$L = \int_{-2}^{1} [(x^3 - 4x) - (x^2 - 4)]dx + \int_{1}^{2} [x^2 - 4 - (x^3 - 4x)]dx$

$L = \int_{-2}^{1} (x^3 - x^2 - 4x + 4)dx + \int_{1}^{2} (-x^3 + x^2 + 4x - 4)dx$

$L = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_{-2}^{1} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x\right]_{1}^{2}$

$L = (\frac{23}{12} - (-\frac{28}{3})) + (-\frac{4}{3} - (-\frac{23}{12}))$

$L = \frac{45}{4} + \frac{7}{12}$

$L = \frac{142}{12}$

$L = \frac{71}{6}$ satuan luas

Maka, pilihan C benar

2. Diketahui daerah yang dibatasi oleh $y = x$, $y = 3x$, dan $y = -x^2 + 6x$. Buatlah sketsa gambar dan hitunglah luas daerah yang diarsir!

Jawab:

Langkah 1: Menentukan Titik Potong Ketiga Kurva

Dari 3 persamaan:

1. PGS I yaitu $y = x$
2. PGS II yaitu $y = 3x$
3. Persamaan Kurva yaitu $y = -x^2 + 6x$

Titik P (PGS I dan II)

$x = 3x$

$-2x = 0$

$x = 0 \rightarrow$ y = 0

Titik yang membatasi daerah adalah P $(0, 0)$.

Titik R (PGS I dan Kurva)

$x = -x^2 + 6x$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0 \ atau \ x = 5$

$y = 0 \ atau \ y = 5$

Titik yang membatasi daerah adalah (0,0) atau R $(5, 5)$.

Titik Q (PGS II dan Kurva)

$3x = -x^2 + 6x$

$x^2 - 3x = 0$

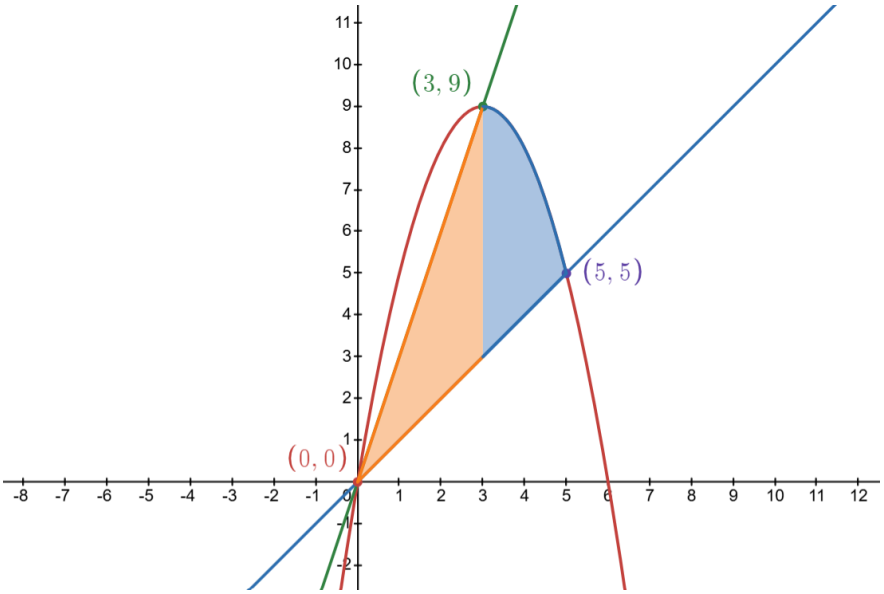
$x(x - 3) = 0$

$x = 0 \ atau \ x = 3$

$y = 0 \ atau \ y = 9$

Titik yang membatasi daerah adalah (0,0) atau Q $(3, 9)$.

Langkah 2: Membuat Gambar untuk Mengetahui Daerah yang Diarsir



Langkah 3: Menentukan Persamaan Luas Daerah

Karena kurva atas berubah di titik Q (3,9), perhitungan harus dibagi menjadi dua bagian.

Bagian Pertama (P ke Q)

- Atas: $y = 3x$
- Bawah: $y = x$

$$L_1 = \int_0^3 (3x - x)\, dx$$

$$= \int_0^3 (2x)\, dx$$

Bagian Kedua (Q ke R)

- Atas: $y = -x^2 + 6x$
- Bawah: $y = x$

$$L_2 = \int_3^5 (-x^2 + 6x - x)\,dx$$
$$= \int_3^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$

Sehingga,

$$L = L_1 + L_2$$
$$L = \int_0^3 (2x)\,dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$

Langkah 4: Menghitung Luas Total

Luas Bagian 1

$$L_1 = \int_0^3 (2x)\,dx$$
$$L_1 = \left[x^2\right]_0^3$$
$$L_1 = 9 - 0$$
$$L_1 = 9\ satuan\ luas$$

Luas Bagian 2

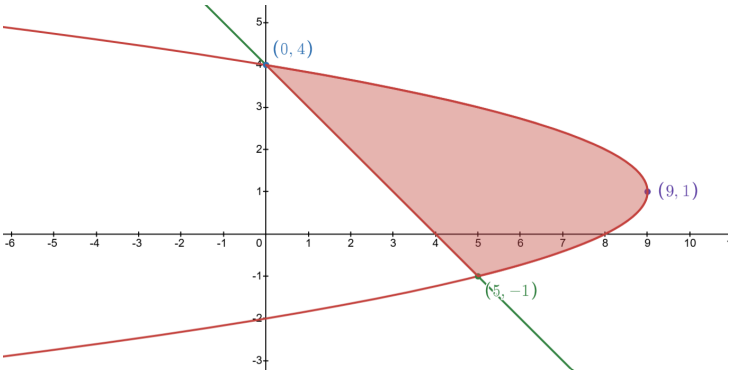
$$L_2 = \int_3^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$
$$L_2 = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_3^5$$
$$L_2 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - \left(-\frac{27}{3} + \frac{45}{2}\right)$$
$$L_2 = \left(-\frac{250}{6} + \frac{375}{6}\right) - \left(-9 + \frac{45}{2}\right)$$
$$L_2 = \left(\frac{125}{6}\right) - \left(\frac{27}{2}\right)$$
$$L_2 = \frac{125}{6} - \frac{81}{6}$$
$$L_2 = \frac{44}{6} = \frac{22}{3}\ satuan\ luas$$

Luas Total

$$L = L_1 + L_2$$
$$L = 9 + \frac{22}{3}$$
$$L = \frac{27}{3} + \frac{22}{3}$$
$$L = \frac{49}{3} = 16\frac{1}{3}\ satuan\ luas$$

Maka, luas daerah yang diarsir adalah $16\frac{1}{3}\ satuan\ luas$ **.**

3. Tentukan pernyataan yang benar yang didapat dari hasil perhitungan luas area pada pilihan jawaban berikut ini! (jawaban benar lebih dari 1)



A. Persamaan garis parabolanya adalah $x = -y^2 + 2y + 8$
B. Luas daerah yang didapat adalah $\frac{125}{6}$
C. Luas daerah yang didapat adalah $\frac{126}{6}$
D. Persamaan garis parabolanya adalah $x = y^2 - 2y + 8$
E. Persamaan garis lurusnya adalah $4x + 4y = 16$

Jawab:

Langkah 1: Membuat persamaan garis

I. Persamaan parabola (menggunakan 1 titik puncak dan 1 titik bantu):

$x - xp = a(y - yp)^2$

Titik puncak: (9,1)

Titik bantu: (0,4)

- masukkan titik puncak

$x - 9 = a(y - 1)^2$

$x - 9 = a(y^2 - 2y + 1)$ …1)

- masukkan titik bantu

$0 - 9 = a(16 - 8 + 1)$

$-9 = 9a$

$a = -1$

- masukkan nilai a ke persamaan …1)

$x - 9 = -1(y^2 - 2y + 1)$

$x - 9 = -y^2 + 2y - 1$

$x = -y^2 + 2y + 8$ (mendapatkan persamaan parabola dapat mengecek jawaban untuk pilihan jawaban A dan D)

II. Persamaan garis:

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

Titik yang diketahui:

(x_1, y_1) -> $(4, 0)$

(x_2, y_2) -> $(0, 4)$

- masukkan titik yang diketahui ke dalam rumus

$\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-4}{0-4}$

$\frac{y}{4} = \frac{x-4}{-4}$

$-4y = 4x - 16$

$4x = -4y + 16$

$x = 4 - y$

(mendapatkan persamaan garis dapat mengecek jawaban untuk pilihan jawaban E)

$4x + 4y = 16$ (apabila dikali 4 untuk mengecek pilihan jawaban E)

Langkah 2: Menghitung integral luasnya

$$L = \int_{batas\ bawah}^{batas\ atas} (f(y)\ kanan - f(y)\ kiri)\ dy$$

$$L = \int_{-1}^{4} (-y^2 + 2y + 8 - (4 - y))\, dy$$

$$L = \int_{-1}^{4} (-y^2 + 2y + 8 - 4 + y)\, dy$$

$$L = \int_{-1}^{4} (-y^2 + 2y + 8 - (4 - y))\, dy$$

$$L = \int_{-1}^{4} (-y^2 + 3y + 4)\, dy$$

$$L = \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + 4y\right]_{-1}^{4}$$

$$L = \left(-\frac{64}{3} + \frac{3(16)}{2} + 16\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right)$$

$$L = \left(-\frac{64}{3} + 24 + 16\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right)$$

$$L = \frac{56}{3} - \left(-\frac{13}{6}\right)$$

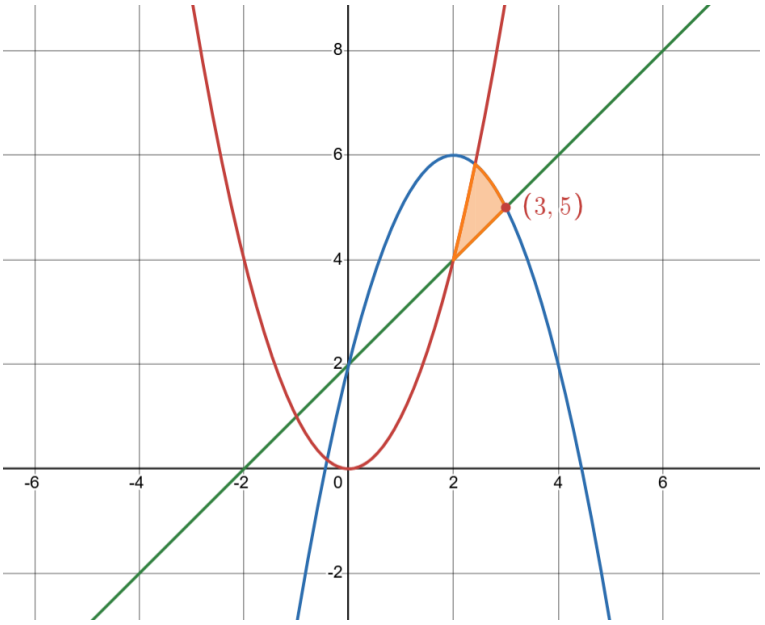
$$L = \frac{112}{6} + \frac{13}{6}$$

$$L = \frac{125}{6}$$

$L = 20\frac{5}{6}\ satuan\ luas$ ((mendapatkan persamaan garis dapat mengecek jawaban untuk pilihan jawaban B dan C)

Jawaban yang benar: A, B, dan E karena sesuai dengan hasil yang telah diperhitungkan

4. Perhatikan gambar berikut!



Keterangan:
- Garis berwarna hijau
- Kurva I berwarna merah
- Kurva II berwarna biru

Berdasarkan gambar tersebut, pilihlah pernyataan yang benar mengenai persamaan ketiga kurva dan luas daerah yang dibatasi oleh ketiganya.

A. Persamaan Garis adalah $y = 2x + 2$, karena gradien garis yang melalui titik $(0, 2)$ dan $(3, 5)$ adalah 2.

B. Persamaan Kurva I adalah $y = x^2$, karena memiliki titik puncak $(0, 0)$ dan melalui titik $(2, 4)$.

C. Persamaan Kurva II adalah $y = (x - 2)^2 + 6$, karena memiliki titik puncak $(2, 6)$ dan terbuka ke bawah.

D. Luas daerah dapat dihitung dengan $L = \int_{2}^{1+\sqrt{2}} (x^2 - x - 2)\, dx + \int_{1+\sqrt{2}}^{3} (-x^2 + 3x)\, dx$

E. Luas total daerah yang diarsir adalah $\left(\frac{27 - 16\sqrt{2}}{6}\right)$ satuan luas.

Pembahasan

A. Menentukan Gradien

Dari grafik, garis melalui titik (0,2) dan (3,5).

Sehingga,

$m = \frac{5-2}{3-0}$

$m = \frac{3}{3}$

$m = 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 1(x - 0)$

$y = x + 2$

Maka, pilihan A salah karena gradiennya bukan 2.

B. Menentukan Persamaan Kurva I

Diketahui titik puncaknya (0,0) dan parabola melalui titik (2,4).

Sehingga,

$y = a(x - h)^2 + k$

$y = ax^2$

$4 = a(2)^2$

$4 = 4a$

$a = 1$

$y = x^2$

Maka, pilihan B benar.

C. Menentukan Persamaan Kurva II

Diketahui titik puncaknya (2,6) dan parabola melalui (0,2).

Sehingga,

$y = a(x - h)^2 + k$

Dari titik puncaknya (2,6)

$y = a(x - 2)^2 + 6$

Parabola melalui (0,2)

$2 = a(0 - 2)^2 + k$

$2 = 4a + 6$

$4a = (-4)$

$a = (-1)$

Persamaannya menjadi

$y = -(x - 2)^2 + 6$

$y = -x^2 + 4x + 2$

Maka, pilihan C salah.

D. Menentukan Luas Daerah

Titik Potong Ketiga Kurva

Dari 3 persamaan:

4. Persamaan Garis yaitu $y = x + 2$
5. Persamaan Kurva I yaitu $y = x^2$
6. Persamaan Kurva II yaitu $y = -x^2 + 4x + 2$

Titik P (Garis dan Kurva I)

$x + 2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2 \ atau \ x = (-1)$

Titik yang membatasi daerah adalah P $(2, 4)$.

Titik R (Garis dan Kurva II)

$x + 2 = -x^2 + 4x + 2$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x = 0 \ atau \ x = 3$

Titik yang membatasi daerah adalah R $(3, 5)$.

Titik Q (Kurva I dan II)

$x^2 = -x^2 + 4x + 2$

$2x^2 - 4x - 2 = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

Untuk daerah yang diarsir, gunakan $x = 1 + \sqrt{2}$

Substitusi ke $y = x^2$

$y = (1 + \sqrt{2})^2$

$y = 3 + 2\sqrt{2}$

Maka, Titik Q $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$.

Luas Daerah

Karena kurva atas berubah di titik Q, perhitungan harus dibagi menjadi dua bagian.

Bagian Pertama (P ke Q)

- Atas: $y = x^2$
- Bawah: $y = x + 2$

$$L_1 = \int_2^{1+\sqrt{2}} (x^2 - x - 2)\, dx$$

Bagian Kedua (Q ke R)

- Atas: $y = -x^2 + 4x + 2$
- Bawah: $y = x + 2$

$$L_2 = \int_{1+\sqrt{2}}^{3} (-x^2 + 3x)\, dx$$

Sehingga,

$$L = L_1 + L_2$$

$$L = \int_2^{1+\sqrt{2}} (x^2 - x - 2)\, dx + \int_{1+\sqrt{2}}^{3} (-x^2 + 3x)\, dx$$

Maka, pilihan D benar.

E. Menghitung Luas Total

Luas Bagian 1

$$L_1 = \int_2^{1+\sqrt{2}} (x^2 - x - 2)\, dx$$

$$L_1 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^{1+\sqrt{2}}$$

$$L_1 = \frac{13}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$L_1 = \frac{13 - 8\sqrt{2}}{6}$$

Luas Bagian 2

$$L_2 = \int_{1+\sqrt{2}}^{3} (-x^2 + 3x)\, dx$$

$$L_2 = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{1+\sqrt{2}}^{3}$$

$$L_2 = \frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$L_2 = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{3}$$

Luas Total

$L = L_1 + L_2$

$L = \frac{13 - 8\sqrt{2}}{6} + \frac{7 - 4\sqrt{2}}{3}$

$L = \frac{13 - 8\sqrt{2} + 14 - 8\sqrt{2}}{6}$

$L = \frac{27 - 16\sqrt{2}}{6}$

Maka, pilihan E benar.

5. Diketahui fungsi permintaan suatu produk di pasar ditunjukkan oleh persamaan linear berikut:
   - Fungsi permintaan: $Pd = 84 - 2Q$
   - Fungsi penawaran: $Ps = Q^2 - 8Q + 12$

   Cocokkan kolom 1 dan kolom 2 sesuai dengan jawaban yang benar!

A. Surplus konsumen	1. -6
B. Kuantitas keseimbangan	2. 144
	3. 36
	4. 12

Langkah 1: Menghitung titik keseimbangan pasar

$Pd = Ps$

$84 - 2Q = Q^2 - 8Q + 12$

$Q^2 - 6Q - 72 = 0$

$(Q - 12)(Q + 6) = 0$

$Q_1 = 12 \quad atau \quad Q_2 = -6$ (Q_2 tidak memenuhi karena kuantitas tidak boleh bernilai negatif)

Langkah 2: Menghitung harga keseimbangan (Pe)

- Substitusi hasil Q_1 ke salah satu persamaan

  $Pe = 84 - 2Q$

  $Pe = 84 - 2(12)$

  $Pe = 84 - 24$

  $Pe = 60$

Titik keseimbangan pasar $(Qe, Pe) \; -> \; (12, 60)$

Langkah 3: Menghitung surplus konsumen

$$Cs = \int_0^{Qe} (Pd - Pe)\, dQ$$

$$Cs = \int_0^{12} (84 - 2Q - 60)\, dQ$$

$$Cs = \int_0^{12} (24 - 2Q)\, dQ$$

$$Cs = \left[24Q - \frac{2Q^2}{2}\right]_0^{12}$$

$$Cs = [24(12) - 12^2] - (0 - 0)$$

$$Cs = 288 - 144$$

$$Cs = 144$$

Jawaban yang benar: A. 2 ; B. 4

6. Diketahui fungsi penawaran suatu barang $Ps = 2Q + 4$. Jika harga keseimbangan pasar adalah Rp20 per unit, tentukan besar surplus produsen!

Jawab:

Langkah 1: Mencari Q

$$Pe = Ps$$

$$20 = 2Q + 4$$

$$16 = 2Q$$

$$Qe = 8$$

Langkah 2: Menghitung surplus produsen

$$Ps = \int_0^{Qe} (Pe - Ps)\, dQ$$

$$Ps = \int_0^{8} (20 - 2Q - 4)\, dQ$$

$$Ps = \int_0^{8} (16 - 2Q)\, dQ$$

$$Ps = \left[16Q - Q^2\right]_0^{8}$$

$$Ps = (128 - 64) - 0$$

$$Ps = 64$$